Cebir 1 Bütünleme Sınavı
Cevap Anahtarı

1) a) $2x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 1 \pmod 7$, $3x \equiv 2 \pmod 8$ kongrüans sistemini Çin Kalan Teoremine göre çözelim. Bunun için öncelikle katsayıları x'e göre düzenleyelim.

$2x \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 5$ olur

$3x \equiv 2 \pmod 8 \Rightarrow x \equiv 6 \pmod 8$ olur.

Bu durumda sistem

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 1 \pmod 7 \\ x &\equiv 6 \pmod 8 \end{aligned}\right\}$$

haline dönüşür.

$(5,7) = (5,8) = (7,8) = 1$ olduğundan bu sistemin Çin Kalan Teoremine göre mod 280 de bir çözümü vardır.

$M_1 = 7.8 = 56$, $M_2 = 5.8 = 40$, $M_3 = 5.7 = 35$

$M_1 b_1 \equiv 1 (m_1)$, $M_2 b_2 \equiv 1 (m_2)$, $M_3 b_3 \equiv 1 (m_3)$

$56 b_1 \equiv 1 (5)$, $40 b_2 \equiv 1 (7)$, $35 b_3 \equiv 1 (8)$

$b_1 \equiv 1 (5)$, $5 b_2 \equiv 1 (7)$, $3 b_3 \equiv 1 (8)$

$b_2 \equiv 3 (7)$, $b_3 \equiv 3 (8)$

$$x = \sum_{i=1}^{3} M_i b_i a_i = 56.1.3 + 40.3.1 + 35.3.6 \equiv 78 (280)$$

$x \equiv 78 (280)$ bulunur.

b) $1426x \equiv 487 \pmod{1845}$ kongrüansı için $(1426, 1845) = 1 \mid 487$ olduğundan kongrüansın bir tek çözümü vardır. Öklid yöntemi kullanarak bu çözümü bulalım. 1426 ve 1845'e öklid algoritması uygulayalım.

$1845 = 1.1426 + 419$
$1426 = 3.419 + 169$
$419 = 2.169 + 81$
$169 = 2.81 + 7$
$81 = 11.7 + 4$
$7 = 1.4 + 3$
$4 = 1.3 + 1$

$1 = 4 - 1.3$
$1 = 4 - 1.(7 - 1.4)$
$1 = 2.4 - 1.7$
$1 = 2.(81 - 11.7) - 1.7$
$1 = 2.81 - 23.7$
$1 = 2.81 - 23.(169 - 2.81)$
$1 = 48.81 - 23.169$
$1 = 48(419 - 2.169) - 23.169$
$1 = 48.419 - 119.169$
$1 = 48.419 - 119(1426 - 3.419)$
$1 = 405.419 - 119.1426$
$1 = 405(1845 - 1426) - 119.1426$
$1 = 405(1845) - 524.1426$

Her iki tarafı 487 ile çarpılırsa

$$487 = 405.487.1845 + \underbrace{(-524).487}_{x}.1426$$

$x \equiv -255188 \pmod{1845}$
$x \equiv 1267 \pmod{1845}$

2) a) $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ olduğunu biliyoruz.
$C(H) \leq N_G(H)$ olur mu? Araştıralım.

* G bir grup ve $H \leq G$ old. $e \in G$ ve $e \in H$ dır.
$\forall h \in H$ için $he = eh$ olup $e \in C(H)$ dır.
Yani $C(H) \neq \emptyset$

** $g \in C(H)$ alalım $\forall h \in H$ için $gh = hg$ olur.
$\Rightarrow ghg^{-1} = h \Rightarrow gHg^{-1} = H$ bulunur
$\Rightarrow g \in N_G(H)$

$C(H) \subseteq N_G(H)$

· $\forall g_1, g_2 \in C(H)$ için $g_1.g_2^{-1} \in C(H)$ olur mu?
$g_1, g_2 \in C(H) \Rightarrow \forall h \in H$ için $hg_1 = g_1h$, $hg_2 = g_2h$ olur.

$$h(g_1.g_2^{-1}) = (hg_1).g_2^{-1} = (g_1h)g_2^{-1} = g_1(hg_2^{-1}) = g_1(g_2^{-1}h) = (g_1g_2^{-1})h$$ olup

$\boxed{g_1.g_2^{-1} \in C(H) \text{ dır. } C(H) \leq N_G(H) \text{ olur}}$

2) b) Öncelikle verilen permütasyonu ayrık devirlerin çarpımı olarak yazalım. Permütasyon α olsun.

$\alpha = (1\,5\,4\,2\,3\,6\,7)$ olarak bulunur

$o(\alpha) = 7$, $\alpha^{-1} = (7\,6\,3\,2\,4\,5\,1)$

$M(\alpha) = \{ \beta \in S_7 \mid \beta \alpha \beta^{-1} = \alpha \}$

$$(\beta(1)\,\beta(5)\,\beta(4)\,\beta(2)\,\beta(3)\,\beta(6)\,\beta(7)) = (1\,5\,4\,2\,3\,6\,7)$$
$$= (5\,4\,2\,3\,6\,7\,1)$$
$$= (4\,2\,3\,6\,7\,1\,5)$$
$$= (2\,3\,6\,7\,1\,5\,4)$$
$$= (3\,6\,7\,1\,5\,4\,2)$$
$$= (6\,7\,1\,5\,4\,2\,3)$$
$$= (7\,1\,5\,4\,2\,3\,6)$$

$M(\alpha) = \{ I, (1\,5\,4\,2\,3\,6\,7), (1\,4\,3\,7\,5\,2\,6), (1\,6\,2\,5\,7\,3\,4),$
$(1\,2\,7\,4\,6\,5\,3), (1\,3\,5\,6\,4\,7\,2),$
$(1\,7\,6\,3\,2\,4\,5) \}$

α'nın teklik çiftliği için transpozisyon sayısına bakalım

$\alpha = (1\,5\,4\,2\,3\,6\,7) = (1\,7)(1\,6)(1\,3)(1\,2)(1\,4)(1\,5)$

olup 6 tane ikili devir var yani çift permütasyondur

3) a) $Q_8 = \{+1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ olduğunu

biliyoruz. Burada
$i \cdot j = k$, $j \cdot i = -k$
$j \cdot k = i$, $kj = -i$
$ki = j$, $ik = -j$
olur. ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ dir.

$Q_8 \neq \phi$ old. açık. ve işlemin ikili işlem old. sorunda verilmiş. O halde $(Q_8, \cdot)$ cebirsel yapıdır.

Grup aksiyomlarını sağlar mı? bakalım.

Grup aksiyomlarına bakıldığında

* Birleşme özelliği: Q_8 deki her üç eleman için çarpma işleminin birleşmeli old. görülür çünkü $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ dir

* Birim eleman öz: Burada $+1$, kümenin birim elemanı olacaktır. Çünkü Q_8 deki her a elemanı için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ dır

* Ters eleman öz: İçindeki her elemanın tersi vardır
1 ve -1'in tersi kendisine eşittir.
i'nin tersi $-i$, j'nin $-j$, k'nın $-k$ dır.
O halde Q_8 tanımlı çarpma işlemine göre
bir gruptur. Bu grubun merkezi
$M(Q_8) = \{+1, -1\}$ bulunur.

3 b) $\theta : Q^* \longrightarrow Q^*$, $\theta(x) = x^2$ fonksiyonunun
Çekirdeğinden bahsedebilmek için θ homomorfizma
olmalıdır

$\forall x, y \in Q^*$ için $\theta(x.y) = (x.y)^2 = (xy)(xy)$ ($(Q^*, \cdot)$ değişmeli old.)
$$= x^2 . y^2$$
$$= \theta(x).\theta(y)$$

olup θ homomorfizmadır
$$\text{Çek } \theta = \{x \in Q^* \mid \theta(x) = 1\}$$
$$= \{x \in Q^* \mid x^2 = 1\} = \{+1, -1\}$$
$$\text{Im } \theta = \{\theta(x) \mid x \in Q^*\}$$
$$= \{x^2 \mid x \in Q^*\}$$

θ birebir olur mu? Çek $\theta = \{+1, -1\} \neq \{+1\}$
olup Çek θ, tanım kümesinin biriminden farklıdır
Dolayısıyla θ birebir değildir

θ örten olur mu?
Im $\theta \neq Q^*$ olur. Çünkü $\forall y \in Q^*$ için $y = x^2$ o.ş
$x \in Q^*$ bulunamaz. Örneğin $y = \frac{1}{2} \in Q^* \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin Q^*$$

θ örten değildir.

4) a) G sonlu bir grup, $H \trianglelefteq G$ olsun. P, H'nın sylow p-alt grubu ise $G = H \cdot N_G(P)$ old. gösterelim.

Bunun için her iki taraf birbirinin alt kümesi olmalıdır.

$H \subseteq G$ ve $N_G(P) \subseteq G$ old. $HN_G(P) \subseteq G$ ...(1)

Tersine keyfi bir $x \in G$ alalım. $H \trianglelefteq G$ ve P, H'nın sylow p-alt grubu olduğundan

$x \in G \Rightarrow xPx^{-1} \subseteq xHx^{-1} = H$

$h \in H$ için $hxP(hx)^{-1} = P$

N_G'ı tanımından

$\Rightarrow hx \in N_G(P)$

$\Rightarrow hx = y$ o.ş. $\exists y \in N_G(P)$

$\Rightarrow x = h^{-1}y$ olup $x \in HN_G(P)$

$G \subseteq HN_G(P)$ ---(2)

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir.

4 b) G bir grup $H \trianglelefteq G$ olsun. Eğer H ve G/H p-grup ise G de p-gruptur, gösterelim.

$a \in G$ alalım. $aH \in G/H$ olup G/H p-grup olduğundan

$(aH)^{p^k} = H \Rightarrow a^{p^k} \in H$ olup H p-grup olduğundan

$\Rightarrow (a^{p^k})^{p^m} = e$

$\Rightarrow a^{p^{k+m}} = e$ olup G deki her elemanı mertebesi p'nin bir kuvveti olduğundan G de bir p-gruptur

5) $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$

$n_7 | 8 \wedge n_7 = 1+7k$

$n_7 = 1, 2, 4, 8 \wedge n_7 = 1, 8, 15$

ortak olanlar $1, 8$

$n_7 = 1$ ise tek olup alt grup P ise $P \trianglelefteq G$ dir.

$n_7 = 8$ ise $P_1, P_2, \dots, P_8$ olsun. $i \neq j$ için P_i, P_j alalım.

$$|P_i P_j| = \frac{|P_i||P_j|}{|P_i \cap P_j|} \quad P_i \cap P_j \subset P_i \text{ olup}$$

$|P_i \cap P_j| \,|\, 7$ olduğundan $|P_i \cap P_j| = 1$ olup $P_i \cap P_j = \{e\}$

Birim hariç $|P_1| + |P_2| + \dots + |P_8| = 48$ olur

$n_2 | 7$, $n_2 = 1+2k$

$n_2 = 1, 7$, $n_2 = 1, 3, 5, 7$

ortak olanlar $1, 7$

$n_2 = 1$ ise tek olup alt grup Q ise $Q \trianglelefteq G$

$n_2 = 7$ ise $Q_1, Q_2, \dots, Q_7$ olsun.

$Q_1 \neq Q_2$ ise $\quad |Q_1 Q_2| = \dfrac{|Q_1||Q_2|}{|Q_1 \cap Q_2|}$ olup $|Q_1 \cap Q_2| \leq 4$

olmalıdır. $|Q_1 \cap Q_2| \,|\, |Q_1|$, $|Q_1 \cap Q_2| = 1, 2, 4$ olabilir

$Q_1 \cup Q_2$ en çok 12 elemanlı olur.

$$48 + 12 = 60 \geq |G|$$

$n_2 = n_7 = 1$ olup G basit grup değildir